Københavns Universitet. Økonomisk Institut

2. årsprøve 2017 V-2DM ex ret

Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

Mandag den 16. januar 2017

Rettevejledning

Opgave 1. For ethvert talpar $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ betragter vi tredjegradspolynomiet $P_{(a,b)} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P_{(a,b)}(z) = z^3 + (a + b + 1)z^2 + (a + ab + b)z + ab.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + (a + b + 1)\frac{d^2x}{dt^2} + (a + ab + b)\frac{dx}{dt} + abx = 0,$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 4x = 36e^t.$$

(1) Vis, at tallet $z = -a$ er rod i polynomiet $P_{(a,b)}$. Bestem dernæst samtlige rødder i polynomiet $P_{(a,b)}$, og angiv deres multipliciteter.

Løsning. Ved indsættelse af $z = -a$ i polynomiet $P_{(a,b)}$, ser vi, at $z = -a$ er en rod i dette polynomium, og ved polynomiers division opnår vi, at udsagnet

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : P_{(a,b)}(z) = (z + a)(z^2 + (b + 1)z + b)$$

er opfyldt, og herefter finder vi, at rødderne er $z = -a, z = -1$ og $z = -b$.

Tilfælde 1: Hvis $a = b = 1$, er $z = -1$ en tripelrod.

Tilfælde 2: Hvis $a = 1$ og $b \neq 1$, er $z = -1$ en dobbeltrod, og $z = -b$ er en simpel rod.

Tilfælde 3: Hvis $b = 1$ og $a \neq 1$, er $z = -1$ en dobbeltrod, og $z = -a$ er en simpel rod.

Tilfælde 4: Hvis $a = b$ og $a \neq 1$, er $z = -1$ en simpel rod, og $z = -a = -b$ er en dobbeltrod.

Tilfælde 5: Hvis $a \neq -1, b \neq -1$ og $a \neq b$, er $z = -1, z = -a$ og $z = -b$ simple rødder.

(2) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

Løsning. Vi får følgende muligheder:

Tilfælde 1:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 t^2 e^{-t}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

Tilfælde 2:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^{-bt}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

Tilfælde 3:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^{-at}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

Tilfælde 4:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-at} + c_3 t e^{-at}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

Tilfælde 4:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-at} + c_3 e^{-bt}, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

(3) For hvilke talpar $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ er differentialligningen $(*)$ globalt asymptotisk stabil?

Løsning. Differentialligningen $(*)$ er globalt asymptotisk stabil, hvis og kun hvis $a > 0$ og $b > 0$.

(4) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

Løsning. Vi ser, at $a = b = 2$, og vi gætter på en løsning af formen $\hat{x} = Ae^t$. Vi får, at $A = 2$, så den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$ er

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t} + 2e^t, \text{ hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

For ethvert $c \in \mathbf{R}$ betragter vi den homogene, lineære differentialligning

$$(***) \qquad \frac{d^3x}{dt^3} + c\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + 2cx = 0.$$

(5) Opstil Routh-Hurwitz matricen $A_3(c)$ for differentialligningen $(***)$, og bestem de $c \in \mathbf{R}$ for hvilke differentialligningen $(***)$ er globalt asymptotisk stabil.

Løsning. Vi finder, at

$$A_3(c) = \begin{pmatrix} c & 2c & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 0 & c & 2c \end{pmatrix}.$$

De ledende hovedunderdeterminanter for denne matrix er $D_1 = c, D_2 = c^2 - 2c = c(c-2)$ og $D_3 = 2c(c^2 - 2c) = 2c^2(c-2)$. Hvis disse determinanter alle skal være positive, må vi kræve, at $c > 2$.

Opgave 2. Vi betragter mængden

$$A = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\},$$

og for ethvert $n \in \mathbf{N}$ betragter vi tillige afbildningen $f_n : A \to A$, som er defineret ved forskriften

$$\forall\, z \in A : f_n(z) = z^n.$$

(1) Vis, at for ethvert $n \in \mathbf{N}$ har afbildningen f_n mindst et fixpunkt $z^* \in A$. Dvs., at $f(z^*) = z^*$.

Løsning. Vi ser, at f_n er kontinuert, og da mængden A er kompakt og konveks, følger påstanden af Brouwers fixpunktssætning.

(2) For ethvert $n \in \mathbf{N}$ skal man bestemme alle fixpunkterne for funktionen f_n.

Løsning. For $n = 1$ er $f_1(z) = z$, så ethvert $z \in A$ er et fixpunkt for funktionen f_1.

Hvis $n > 1$, har man, at

$$f_n(z) = z \Leftrightarrow z^n = z \Leftrightarrow z = 0 \vee z^{n-1} = 1 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \epsilon_k,$$

hvor $k = 0, 1, \ldots, k-2$, og ϵ_k er den k'te $(n-1)$'ste enhedsrod, altså

$$\epsilon_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n-1}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n-1}\right).$$

Vi betragter herefter følgen (z_n) (af punkter fra mængden A), som er defineret ved forskriften

$$\forall\, n \in \mathbf{N} : z_n = f_n\left(\frac{i}{2}\right).$$

(3) Vis, at følgen (z_n) er konvergent, og bestem grænsepunktet.

Løsning. Vi ser, at $|z_n| = (\frac{1}{2})^n \to 0$ for $n \to \infty$, hvilket godtgør, at (z_n) er konvergent, og at $(z_n) \to 0$.

(4) Lad

$$\zeta_0 \in A^O = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$$

være vilkårligt valgt. Vis, at følgen (ζ_n), hvor betingelsen

$$\forall \in \mathbf{N} : \zeta_n = f_n(\zeta_0)$$

er opfyldt, er konvergent, og bestem grænsepunktet for denne følge.

Løsning. Da $|\zeta_0| < 1$, har vi, at $|\zeta_n| \to 0$, for $n \to \infty$, så (ζ_n) er konvergent og $(\zeta_n) \to 0$.

Opgave 3. Vi betragter den vektorfunktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, 3x_1 - 5x_2^2).$$

(1) Bestem Jacobimatricen $Df(x_1, x_2)$ for vektorfunktionen f i et vilkårligt punkt $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

Løsning. Vi finder, at

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 + 2x_2 \\ 3 & -10x_2 \end{pmatrix}.$$

(2) Godtgør, at Jacobimatricen $Df(1,1)$ er regulær, og påvis, at der findes en åben omegn V af $(1,1)$ og en åben omegn W af $f(1,1)$, så restriktionen $f\,|_V$ af f til V er en bijektiv afbildning af V på W.

Løsning. Da Jacobimatricen

$$Df(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$$

har determinanten $D = -39$, er den regulær, og påstanden følger nu af sætningen om eksistensen af lokalt invers vektorfunktion.

(3) Løs ligningen

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - f(1,1) = Df(1,1) \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

med hensyn til vektoren $x = (x_1, x_2)$.

Løsning. Vi ser, at $f(1,1) = (3,-2)$, så vi får, at

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix},$$

hvoraf man finder, at

$$x_1 = \frac{10}{39}y_1 + \frac{1}{13}y_2 + \frac{5}{13} \wedge x_2 = \frac{1}{13}y_1 - \frac{1}{13}y_2 + \frac{8}{13}.$$

Lad (x_k) være en vilkårlig følge af punkter fra $\mathbf{R}^2$, og lad der være givet et tal $r > 0$, så betingelsen

$$\forall\, k \in \mathbf{N} : x_k \in B(\underline{0}, r)$$

er opfyldt.

(4) Vis, at følgen (x_k) har en konvergent delfølge (x_{k_p}) med grænsepunkt x_0. Hvad kan man sige om $\|x_0\|$?

Løsning. Det er klart, at den afsluttede kugle $\overline{B(\underline{0}, r)}$ er kompakt, hvoraf vi ser, at der findes en konvergent delfølge (x_{k_p}) med grænsepunkt x_0. Desuden gælder det, at $\|x_0\| \leq r$, thi $x_0 \in \overline{B(\underline{0}, r)}$.

Vi betragter herefter følgen (ξ_k), som er givet ved forskriften

$$\forall\, k \in \mathbf{N} : \xi_k = f(x_k).$$

(5) Godtgør, at delfølgen $(\xi_{k_p}) = (f(x_{k_p}))$ er konvergent med grænsepunktet $\xi_0 = f(x_0)$.

Løsning. Da funktionen f er kontinuert, vil den konvergente delfølge (x_{k_p}) blive afbildet på den konvergente delfølge $(\xi_{k_p}) = (f(x_{k_p}))$, der har grænsepunktet $\xi_0 = f(x_0)$.

Opgave 4. Vi betragter integralet

$$I(x) = \int_0^{\sqrt{2}} \left(u^2 + x + u + x^2\right) dt.$$

Vi skal løse det optimale kontrolproblem at minimere integralet $I(x)$, idet $\dot{x} = u - x$, $x(0) = -\frac{1}{2}$ og $x(\sqrt{2}) = \frac{3}{2}$.

(1) Opskriv Hamiltonfunktionen $H = H(t, x, u, p)$ for dette optimale kontrolproblem.

Løsning. Vi ser umiddelbart, at

$$H(t, x, u, p) = u^2 + x + u + x^2 + p(u - x),$$

og vi ser, at

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 1 + 2x - p = -\dot{p} \text{ og } \frac{\partial H}{\partial u} = 2u + 1 + p = 0.$$

(2) Vis, at dette optimale kontrolproblem er et minimumsproblem.

Løsning. Vi bemærker, at Hessematricen

$$H''(x, u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

er positiv definit, hvilket viser, at funktionen $H = H(x, u)$ er (endda strengt) konveks. Det optimale kontrolproblem er derfor et minimumsproblem.

(3) Bestem det optimale par (x^*, u^*), som løser problemet.

Løsning. Vi bemærker, at $-p = 2u + 1$, så $-\dot{p} = 2\dot{u}$. Endvidere er $u = x + \dot{x}$ og $\dot{u} = \dot{x} + \ddot{x}$. Vi finder så, at

$$-\dot{p} = 1 + 2x - p \Leftrightarrow 1 + 2x + 2x + 2\dot{x} + 1 = 2\dot{x} + 2\ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} - 2x = 1.$$

Den konstante funktion $\hat{x} = -\frac{1}{2}$ er en løsning til denne differentialligning, og da det karakteristiske polynomium for den tilhørende homogene differentialligning er $P(\lambda) = \lambda^2 - 2$, bliver den fuldstændige løsning åbenbart

$$x = Ae^{\sqrt{2}t} + Be^{-\sqrt{2}t} - \frac{1}{2}, \quad \text{hvor } A, B \in \mathbf{R}.$$

Da $x(0) = A + B - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, er $B = -A$, så

$$x = A\left(e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}\right) - \frac{1}{2}, \quad \text{hvor } A \in \mathbf{R}.$$

Da $x(\sqrt{2}) = A\left(e^2 - e^{-2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, er $A = \frac{2}{e^2 - e^{-2}} = \frac{2e^2}{e^4 - 1}$. Vi har derfor, at

$$x^* = \frac{2e^2}{e^4 - 1}\left(e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}\right) - \frac{1}{2},$$

så

$$\dot{x}^* = \frac{2e^2}{e^4 - 1}\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} + \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t}\right).$$

Da får vi, at $u^* = x^* + \dot{x}^*$, hvoraf vi da finder, at

$$u^* = \frac{2e^2}{e^4 - 1}\left((\sqrt{2} + 1)e^{\sqrt{2}t} + (\sqrt{2} - 1)e^{-\sqrt{2}t}\right) - \frac{1}{2}.$$